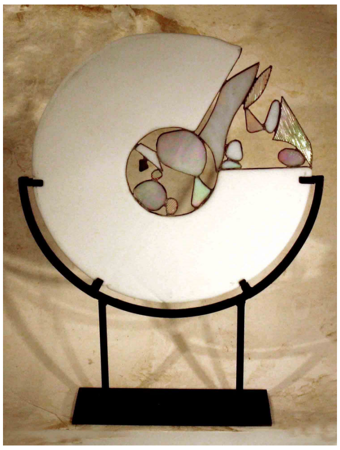
Matematisk problemlösning

Linda Jarlskog

www.artandscience.se
linda.jarlskog@lund.se



Matematikdagen, den 7/3-2011
Lunds kommun

Problemlösning behövs för att fånga upp och utveckla elevers kreativitet och förmåga till att använda sig av matematik vid olika situationer. Genom problemlösning tränas även elevers tålamod och förmåga att kommunicera matematik. Den visualisering av abstrakta begrepp som problemlösning för med sig hjälper även många elever till en djupare matematisk förståelse.

Innehållsförteckning

För att variera undervisningen och för att elever skall få en djupare förståelse kring matematiska begrepp låter jag mina elever arbeta med fördjupningsuppgifter och matematisk problemlösning som komplement till det gemensamma och individuella räknandet i läroboken. Specifikt för matematisk problemlösning är att ”uppgifterna” är av icke-standardtyp och att det inte finns någon färdig procedur för att lösa problemet.

Så definieras ”matematiska problem” och ”rika matematiska problem”

En definition av ”matematiska problem”

Det finns olika definitioner kring vad som krävs av en uppgift för att den skall betraktas som ett matematiskt problem. En definition som ofta tillämpas, som ursprungligen formulerades av Lester (1983)[1] är:

1. Individen eller gruppen som möter problemet vill eller behöver finna en lösning.
2. Det finns inte någon tillgänglig procedur som garanterar eller innebär en komplett lösning.
3. Individen eller gruppen måste göra en ansträngning för att finna lösningen.

Personligen skulle jag önska att inte viljan betonades lika starkt då många elever behöver vänja sig vid arbetsmetoden för att kunna bygga upp en vilja att lösa matematiska problem.

En definition av ”rika matematiska problem”

Det finns matematiska problem som går under beteckningen ”rika matematiska problem”. En definition för när ett matematiskt problem anses vara ett ”rikt matematiskt problem” är när följande sju kriterier är uppfyllda[2]: Då skall problemet:

1. introducera till viktiga matematiska idéer eller vissa lösningsstrategier
2. vara lätt att förstå och alla skall ha en möjlighet att arbeta med det
3. upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid
4. kunna lösas på flera olika sätt, med olika matematiska strategier och representationer
5. kunna initiera en matematisk diskussion utifrån elevernas skilda lösningar, en diskussion som visar på olika strategier, representationer och matematiska idéer
6. fungera som en brobyggare
7. kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem

[1] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University.
[2] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University.
som i sin tur refererar till Lester, F. K. Jr. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem- Solving Research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press, Inc. (pp. 229-261)

Varför skall elever undervisas i problemlösning?

En viktig orsak till att elever skall undervisas i problemlösning är för att läroplanen, ämnesplaner och kursplaner säger så. Att planerna säger så beror i sin tur på undervisningsmetodens många fördelar.

På följande sidor presenteras några utdrag kring vad som står om problemlösning för matematikundervisningen i gymnasiet i läroplanen[3] (Lpf 94), nuvarande[4] och kommande[5] ämnesplan, i nuvarande kursplan[6] för Matematik A samt i kommande kursplan[5] för Matematik 1a. Nästa stycke handlar om vad problemlösning innebär och varför problemlösning är värdefullt.

Problemlösning - för att det står skrivet i läroplan, ämnesplan och kursplan

Vad läroplanen, Lpf 94, skriver om problemlösning

I gällande läroplan, 1994 års läroplan för de frivilliga skolformerna (Lpf 94), står det under huvudrubriken ”Gemensamma uppgifter för de frivilliga skolformerna” och under rubriken ”Skolans uppdrag” att: *”Eleverna ska i skolan få utveckla sin förmåga att ta initiativ och ansvar och att arbeta och lösa problem både självständigt och tillsammans med andra”.*

Under underrubriken ”Kunskaper” som finns under rubriken ”Mål och riktlinjer” står det som en punkt att: *”skolan ska sträva mot att varje elev i gymnasieskolan och komvux samt, så långt det är möjlighet i gymnasiesärskola och särvux kan använda sina kunskaper som redskap för att*

- *formulera och pröva antagande och lösa problem,*
- *reflektera över erfarenheter,*
- *kritiskt granska och värdera påståenden och förhållanden, och*
- *lösa praktiska problem och arbetsuppgifter,”*

Under rubriken ”Mål att uppnå” står det även att: *”Det är skolans ansvar att varje elev som har slutfört ett nationellt eller specialutformat program eller sådant individuellt program som är förenat med yrkesutbildning under anställning, s.k. lärlingsutbildning inom gymnasieskolan eller gymnasial vuxenutbildning:*

• *kan formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för yrkes- och vardagsliv,”*

Vad nuvarande och kommande ämnesplan skriver om problemlösning

I nuvarande ämnesplan under rubriken ”Mål att sträva mot” står det att *”Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna*

- *utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,*

[3] Läroplanen för de frivilliga skolformerna - Lpf 94.
[4] http://www.skolverket.se/sb/d/2503/a/13845/func/amnesplan/id/MA/titleId/Matematik
[5] Ämnesplan för ämnet matematik – 2010-09-23, 57(187), Dnr 2009:520
[6] http://www.skolverket.se/sb/d/726/a/13845/func/kursplan/id/3202/titleId/MA1201%20-%20Matematik%20A

- *utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp, bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningar i förhållande till det ursprungliga problemet,*

- *utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,"*

Under rubriken "Ämnets karaktär och uppbyggnad" står det att:

- *problemlösning, kommunikation, användning av matematiska modeller och matematikens idéhistoria är fyra viktiga aspekter av ämnet matematik som genomsyrar undervisningen.*

Vid en annan punkt under rubriken "Ämnets karaktär och uppbyggnad" betonas det även att matematisk problemlösning är en skapande aktivitet och att matematik kräver uthållighet i tankerverksamheten och förståelse för att problemlösning är en process som kräver tid.

I kommande ämnesplan står det under rubriken "Ämnets syfte" att "*Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer."* Lite längre fram står det även att *"Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del" samt att "Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel."*

Därefter listas sju kompetenser som elever skall ges förutsättningar att utveckla i sin undervisning. Den ena kompetensen är problemlösningskompetensen som innebär att varje elev skall ge förutsättningar till att utveckla sin *"Förmåga att formulera, analysera och lösa matematiska problem samt att värdera valda strategier, metoder och resultat."* I bilagan beskrivs de sju kompetenserna.

Vad nuvarande och kommande kursplan skriver om problemlösning

Bland de mål som eleverna skall ha uppnått efter avslutad kurs i samband med nuvarande kursplan för matematik A betonas problemlösning vid flera tillfällen. Där står det bland annat att eleverna skall:

- *kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för vardagsliv och vald studieinriktning,*

- *vara så förtrogen med grundläggande geometriska satser och resonemang att hon eller han förstår och kan använda begreppen och tankegångarna vid problemlösning,*

- *kunna tolka och hantera algebraiska uttryck, formler och funktioner som krävs för problemlösning i vardagslivet och i studieinriktningens övriga ämnen*

- *kunna ställa upp och tolka linjära ekvationer och enkla potensekvationer samt lösa dem med för problemsituationen lämplig metod och med lämpliga hjälpmedel*

- *ha vana att vid problemlösning använda dator och grafritande räknare för att utföra beräkningar och åskådliggöra grafer och diagram*

I kursplanen för Matematik 1a står det under rubriken ”centralt innehåll” att undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll kring problemlösning**:**

- *Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.*

- *Hur matematiken kan användas som verktyg i behandlingen av omfångsrika problemsituationer i karaktärsämnena. Matematikens möjligheter och begränsningar i dessa situationer.*

- *Matematiska problem av betydelse för privatekonomi, samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.*

- *Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.*

Några betygskriterier som kopplar till problemlösning

I de betygskriterier som är identiska för samtliga nuvarande matematikkurser och i de betygskriterier som gäller för kursen Matematik 1a är det tydligt att även elever som skall nå upp till det lägsta godkända betyget skall ägna sig åt problemlösning. Lägg märke till att de även skall kunna formulera egna problem. Här visas de betygskriterier som anknyter till problemlösning som krävs för:

- betyget G (samtliga matematikkurser)

och

- betyget E (kursen Matematik 1a)

IDAG (från betygskriterer för ett G i samtliga matematikkurser)

Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem ***i ett steg****.*

Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

GY11 (från kunskapsmål för ett E i kursen Matematik 1a)

Eleven formulerar, analyserar och löser praxisnära matematiska problem av enkel karaktär. Dessa problem inkluderar ett fåtal begrepp och kräver enkla tolkningar.

I arbetet gör eleven om delar av problemsituationer i karaktärsämnena till matematiska formuleringar genom att informellt tillämpa givna matematiska modeller.

Eleven utvärderar med enkla omdömen resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

För att uppnå högre betyg är självfallet kraven större. Som exempel visas i tabellen vilka olika kunskapsmål, med anknytning till problemlösning och modelleringskompetens, som krävs för betygen E, C och A för kursen Matematik 1a:

E	C	A
Eleven formulerar, analyserar och löser praxisnära matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar.	Eleven formulerar, analyserar och löser praxisnära matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar.	Eleven formulerar, analyserar och löser praxisnära matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar**.** **I problemlösningen upptäcker eleven generella samband som presenteras med retorisk algebra**.
I arbetet gör eleven om **delar av** problemsituationer i karaktärsämnena till matematiska formuleringar genom att **informellt** tillämpa **givna** matematiska modeller.	I arbetet gör eleven om problemsituationer i karaktärsämnena till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller.	I arbetet gör eleven om problemsituationer i karaktärsämnena till matematiska formuleringar genom att **välja,** tillämpa **och anpassa** matematiska modeller.
Eleven utvärderar med **enkla** omdömen resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.	Eleven utvärderar med **enkla** omdömen resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem.**	Eleven utvärderar med **nyanserade** omdömen resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem.**

I bilagan finns det även en tabell som kopplar kunskapsmålen för betyget E i kursen *Matematik 1a* med de olika matematiska kompetenserna som eleverna skall utveckla under kursens gång.

Problemlösning - för att det är matematikens huvudsyfte och för att det är värdefullt

Matematik har tillkommit och utvecklats för att problem behöver lösas. För en matematiker är det självklart att huvudsyftet med matematik är att kunna lösa problem men så är det inte för våra elever. Kanske kan det bero på att elever upplever att de löser problem som de inte är i behov av att lösa eller att de löser problem som någon annan redan har löst eftersom alla svar står i facit.
Ordet problem har för icke-matematiker i stort sett alltid en negativ klang. För matematiker är däremot problem någonting positivt.

Nedan ges en del motiveringar till varför problemlösning är värdefullt.
Problemlösning är bra för att ge elever möjlighet att:

- se samband mellan matematiken och verkligheten
- få studieinriktningen att inverka på undervisningen
- arbeta i grupp
- lära av varandra
- utveckla den egna kreativiteten och det egna tänkandet
- utveckla det matematiska självförtroendet (egna metoder kan ju fungera)
- se att problem kan lösas på flera olika sätt
- identifiera och bli kvitt matematiska missuppfattningar
- komma ifrån läroboken och den ”imitativa matematiken”
- formulera egna problem och lösa dessa
- utveckla matematiska resonemang (matematiska dialoger)
- ta fram matematiska modeller
- tillämpa matematiska kunskaper på ett friare sätt
- resonera mer aktivt med läraren (istället för att läraren undervisar och elever lyssnar)
- vara drivande i undervisningen (istället för att läroboken eller läraren styr)
- jobba med ett och samma problem under mer än en lektion
- skifta mellan olika representationer*[7]
- att få uppleva matematik med så många sinnen som möjligt**
- att (via representationer) få en koppling till den fysiska världen genom ett konkret arbetssätt, som en ingång till den abstrakta världen[8].

På denna sida presenteras två modeller över hur representationer vid problemlösning kan hjälpa elever att gå, från ett konkret mot ett abstrakt formellt tänkande. Vad som menas med en matematisk representation beskrivs på sidan 17.

---

* en representation är när någonting beskrivs (uttrycks) på ett annat sätt. Varje representation är en abstraktion av den verkliga världen. Exempel på representationer är modeller, bilder, formler, verbala formuleringar...
** de fem sinnena är syn, känsel, hörsel, lukt och smak
[7] Rystedt & Trygg, 2010. *Laborativ matematikutveckling – vad vet vi?*, NCM, Göteborgs universitet.
[8] Heddens, 1986. *Bridging the gap between the concrete and the abstract*. The Aritmetic Teacher, 33(6), 14-17.

Från konkret till abstrakt

I boken *"Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?*[9]*"* av Elisabeth Rystedt & Lena Trygg, återges ett citat av Heddens (1986): *"Många elever har svårt att förstå matematik då de på egen hand inte kan göra kopplingar mellan den fysiska och den abstrakta världen"*. I boken presenteras därefter det förslag som Heddens ger på hur läraren kan hjälpa eleverna att gå från det konkreta arbetet med laborativa material till ett abstrakt matematiskt symbolspråk. Han beskriver en övergång fån konkret till abstrakt som delas upp i fyra nivåer:

I. ***Konkret.*** Arbete med laborativa material.

II. ***Halvkonkret***. Den halvkonkreta nivån är en representation av en verklig situation. Laborativa material byts mot bilder.

III. ***Halvabstrakt.*** Den halvabstrakta nivån medför en symbolisk representation av konkreta föremål, men symbolerna ser inte ut som föremålen utan består av informella symboler som t ex ringar eller streck.

IV. ***Abstrakt.*** Bilder och informella symboler ersätts med formella symboler, räkneregler, räknelagar och andra konventioner.

Från en förkroppsligande värld till en formell värld

En annan modell av forskaren David Tall, som beskrivs i ovan nämnda bok *"Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?"* exemplifieras av en svensk forskare vid namn Juter (2009). I exemplet visar hon på hur olika representationer kan användas för den kommutativa lagen för addition:

I. Den första kallas ***the embodied world*** **(den förkroppsligande)** och utmärks av ett undersökande förhållningssätt där den lärande experimenterar med det aktuella begreppet.

Elever kan upptäcka den kommutativa lagen genom att lägga fem klossar med först två i en hög och tre i den andra och sedan arrangera om dem så att det ligger tre i den ena högen och två i den andra. De kan uppfatta den kommutativa lagen utan att för den skull kunna formulera den.

II. Den andra världen kallas ***the proceptual world***, vilket är en sammansättning av de två orden *process* (process) och *concept* (begrepp). Begrepp byggs upp under årens lopp och grundar sig på erfarenheter av många slag.

I det här fallet handlar det om att elever arbetar med och blir förtrogna med uttryck i formen $2 + 3 = 3 + 2$.

III. I den tredje världen, ***the formal world*** **(den formella världen)**, uttrycks begreppen formellt med symboler, definitioner och satser.

Elever kan generalisera den kommutativa lagen för addition och inse att $a + b = b + a$. Den lärande befinner sig på olika abstraktionsnivåer under begreppsinlärningen och går mellan de olika världarna beroende på begreppets natur och individens matematiska mognad. I samtliga ovanstående modeller, vilka berör elever i olika åldersgrupper, finns någon form av uttalad undervisningsgång mellan det konkreta och det abstrakta.

[9] Rystedt & Trygg, 2010. *Laborativ matematikutveckling – vad vet vi?*, NCM, Göteborgs universitet.

Lite nutidshistorik kring undervisningen för, om och via problemlösning

Att det inte kan ske några större förändringar gällande matematikundervisningen, på samma sätt som i andra ämnen, var något som jag själv under många år trodde på. Ett tydligt exempel på en större förändring är dock hur inställningen till problemlösning har förändrats i vår samtid.

I *läroplanen för grundskolan 1969*, Lgr-69, betonades det att elever skulle skaffa sig kunskaper i matematik för att kunna lösa problem. Med *läroplanen för grundskolan 1980*, Lgr-80, blev det istället så att elever skulle använda sig av problemlösning för att träna på typiska metoder och arbetssätt[10]. Problemen fanns formulerade i läroboken.

I nyare läroplaner, som i *"läroplanen för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet"*, Lpo-94, och *"läroplanen för de frivilliga skolformerna",* Lpf 94, betonas det istället att elever genom problemlösning ska utveckla matematiska tankar och idéer, inse värdet av matematiska symboler, upptäcka matematiska samband samt förstå och kunna föra matematiska resonemang och argumentera för sin lösningsmetod.

Varför läroboken inte är tillräcklig i undervisningen

Det hade varit fördelaktigt om läroböcker hade täckt upp samtliga mål men så är det inte. Jag uppskattar att de flesta läroböcker täcker upp ungefär två tredjedelar av "mål att uppnå" och att "mål att sträva mot" genomsyrar endast till en liten del en av läroboken styrd undervisning. Skolinspektionens kvalitetsgranskning för matematikundervisningen i gymnasiet[11] påtalar att lärare i en alltför stor omfattning förlitar sig på läroböcker trots att läroböcker inte tränar flera av kompetenserna. Skolinspektionens rapport beskriver även att en genomgång som följer på enskilt arbete i läroboken är den klassiska modellen för den svenska matematikundervisningen. Jag anser att speciellt problemlösningskompetensen och resonemangskompetensen inte utvecklas när läroboken på egen hand är styrande i undervisningen. Det är känt att i länder som Japan och Kina, där matematikundervisningen ger elever en djupare matematisk förståelse, är undervisningen indelad i faser där problem av icke-standardtyp spelar en viktig roll.

Följande text, där undervisningen i USA, Tyskland och Japan jämförs, är hämtad från Eva Taflins doktorsavhandling[12]:

*"Tre tydliga faser kan skönjas; inledning, huvudaktivitet och avslutning. Innehållet i dessa lektioners tre olika faser skilde sig markant åt mellan **USA** och **Tyskland** å ena sidan och **Japan** å andra sidan.*

I USA inleddes lektionen med en kontroll av hemläxan, därefter gavs snabba, korta frågor och svar samt demonstrationer av metoder och lösningar av många likadana uppgifter, innan lektionen avslutades med en ny hemläxa, som kunde påbörjas direkt.

I Tyskland startade lektionen med en övning i huvudräkning. Därpå lotsade läraren eleverna genom uppgifterna med korta frågor, innan eleverna (ibland) fick arbeta enskilt.

I Japan däremot inleddes lektionen med en kort återblick på lektionen innan. Därefter fick eleverna enskilt försöka lösa (två) anknytande utmanande uppgifter (problem), sedan diskutera sina lösningar i par, innan några utvalda elevlösningar presenterades på tavlan och diskuterades i helklass. Lektionen avslutades med

[10] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University (s. 41).
[11] Skolinspektionens rapport 2010:13, Diarienummer 40-2009:1837, Stockholm 2010
[12] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University (s. 79).

att läraren summerade lektionens huvudsakliga matematiska innehåll och gav ett anknytande problem som eleverna skulle försöka lösa.

I jämförelse mellan de tre länderna framkom det att lärarna hade skilda roller. De få problem som den japanska klassen behandlade var av icke-standardtyp, medan de två övriga klassernas många uppgifter var mer traditionella demonstrationsuppgifter. I den japanska klassen förväntades eleverna komma med egna förslag på lösningar och de fick även presentera och diskutera lösningar som ledde till ett felaktigt svar. Eleverna i USA och Tyskland undervisades på så sätt att de övade sig på att kopiera lärarens korrekta lösningssätt. Den japanska lektionen ingick i en serie lektioner. I den japanska lektionen ingick både en återblick på lektionen innan och en förberedelse för den kommande lektionen[13]".

Läroböcker kännetecknas av slutna problem vilket innebär att problem har ett givet svar. Problemen är placerade i boken så att elever inte själva behöver fundera över vilka metoder de behöver använda sig av för att lösa dem. På så sätt blir räknandet mer ett imiterande. Om elever endast använder sig av sina läroböcker i undervisningen kommer de sannolikt att tro att det bara finns en metod och ett korrekt svar till uppgifter och problem.
En annan fara med en för läroboksstyrd undervisning, som rapporten[14] skriver om är att den ofta drabbar den elevkategori som har de svagaste förkunskaperna allra mest. I rapporten skrivs det att den elevkategori som hade de svagaste förkunskaperna har fått ännu sämre förkunskaper idag. Det vanligaste är att lärare försöker att hjälpa elever med svaga förkunskaper att uppnå mål genom ett mekaniskt räknande och användning av procedurer. De svagaste eleverna får vanligen lära sig att använda regler istället för att förstå! I elevgrupper där många elever har svaga förkunskaper har heller inte lärarna tid att identifiera och rätta till elevers missuppfattningar i någon tillräcklig utsträckning.

Varför det är vanligt att det undervisas för lite i och via problemlösning

En orsak, som "Skolinspektionens rapport över undervisningen i gymnasieskolan[14]" visar på till att undervisning i och via problemlösning och andra kompetenser ofta inte hanteras i undervisningen, är att lärare missuppfattar målsystemet. Lärare fokuserar på *"mål att uppnå"* som finns i kursplanen och förstår inte att också *"mål att sträva mot"* som finns i ämnesplanen är mål som samtliga elever skall ta del av och som skall ligga till grund för bedömningen. En egen teori är att "mål att stäva mot" kan falla i glömska då de finns separerade från kursplanerna på exempelvis skolverkets hemsida. I tabellen syns de kompetenser som beskrivs i ämnesplanens "mål att sträva mot".

	Förklaring
begreppskompetens	Förmåga att använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
algoritmkompetens	Förmåga att hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
problemlösningskompetens & modelleringskompetens	Förmåga att formulera, analysera och lösa matematiska problem samt att värdera valda strategier, metoder och resultat. Förmåga att tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt att använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar
resonemangskompetens	Förmåga att följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
kommunikationskompetens	Förmåga att kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
kompetens att relatera (egen beteckning)	Förmåga att relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

[13] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University (s. 179).
[14] Skolinspektionens rapport 2010:13, Diarienummer 40-2009:1837, Stockholm 2010

En annan orsak, enligt skolinspektionens rapport, till att det undervisas för lite i flera av kompetenserna, är att lärare ofta har en övertro på läroböcker och förväntar sig att de täcker upp samtliga mål och att det tränar samtliga kompetenser.

Att undervisa i matematisk problemlösning

Det har visat sig att lektioner som delas in i faser ger elever en djupare matematisk förståelse, då det möjliggör för elever att möta och utveckla matematiska idéer på fler olika sätt. Det är även nödvändigt att indela arbetsgången kring rika matematiska problem i faser.
Matematiska problem och rika matematiska problem bör gärna väljas beroende på vad elever jobbar med och beroende på vad elever behöver lära sig. Den övergripande planeringen är ofta ett bra stöd vid valet. Problem bör också väljas utifrån vad den enskilde eleven kan tänkas klara av. Är det alltför svårt kan eleven tappa lusten. Det får dock inte heller vara för lätt för det är när eleven utmanas på gränsen till sin förmåga det blir ett maximalt lärande.[15]

Innan ett matematiskt problem eller ett rikt matematiskt problem presenteras är det bra om läraren själv har funderat över så många olika lösningsstrategier som möjligt. Görs inte detta kan det ta för lång tid för läraren att sätta sig in i elevers tankebanor vilket kan leda till att den avslutande helklassdiskussionen kan bli mindre strukturerad. Vid arbete med problemlösning vill jag rekommendera följande faser:

1. presentation av problemet
2. planeringsfas - kom igång fas
3. lösningsfas
4. vid behov en paus
5. avslutande helklassdiskussion
6. skriftlig dokumentation

Presentation av problemet

Syftet med den första fasen är att samtliga elever skall förstå problemet. Denna fas måste få ta tid så att eleverna hinner reflektera och ställa de frågor som de behöver få svar på för att veta vad det är som skall lösas. Elever kan även kommunicera sinsemellan kring hur de tolkar problemet. Elever kan ha svårt att ta till sig information och det behöver läraren vara medveten om. Det är viktigt att, som lärare, inte föreslå någon strategi i denna fas för då utplånas grundtanken med problemlösning. Om en lärare till exempel har med sig saxar och papper kan eleverna söka efter lösningsmetoder där saxar behövs och kan då hindras från att finna sina egna lösningsmetoder.

Planeringsfas – kom igång fas

Under denna fas är det tänkt att elever samtalar kring olika lösningsstrategier och att läraren ser till att elever som har svårt med att komma igång uppmuntras och stöttas att komma igång. Under denna fas kan även eleverna delas in i grupper.

[15] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University.

Lösningsfas

I denna fas bör elever pröva sina valda strategier*, resonera med varandra och med läraren, kanske skifta strategi, tjuvlyssna på klasskompisar. Om en lösningsmetod inte ser ut att fungera, exempelvis om en metod är hopplöst omständig, så är det ofta ändå bra att låta elever fortsätta då det kan bli ett tillfälle för elever att utveckla en grundförståelse som omständiga (tydliga) metoder ofta för med sig. Att låta elever fortsätta med felaktiga metoder är även bra för att identifiera missuppfattningar. Skulle alla resultat alltid bli rimliga eller korrekta så skulle många intressanta diskussioner utebli.

Vid behov en paus

Det kan behövas en liten paus för att organisera den avslutande helklassdiskussionen. Pausen kan exempelvis behövas för att kopiera lösningar på OH-plast, eller för att anteckna på tavlan (eller någon annan mer modern teknik). Inspelningar kan också bli till ett bra material att återkoppla till. En paus kan också behövas om det exempelvis har framkommit ovanliga idéer som läraren behöver fundera mer kring.

Avslutande helklassdiskussion

Elever delar med sig av sina olika resultat. Olika lösningar presenteras och diskuteras. Det uppmärksammas att problem kan lösas på olika sätt och att det även är givande med felaktiga lösningar för då kan missuppfattningar identifieras. Det går även bra att spinna vidare på felaktiga idéer och genom dessa diskutera och associera till nya spännande begrepp. Elever behöver få veta varför eventuella lösningsmetoder inte fungerade och om det kanske var något som saknades. Felaktiga lösningar är även bra för att få elever medvetna om att svar behöver kontrolleras och ifrågasättas utifrån om de är rimliga.
Det är även bra att, så långt det är möjligt, visa på hur resultaten kan generaliseras och vilka samband som finns mellan de olika idéerna. Finns tiden bör även en återkoppling till målen göras.

Till sist, om inte förr, kan elever uppmuntras att formulera egna liknande problem som kan lösas av dem själva och kanske även andra elever. Genom att elever får formulera liknande problem får de även utveckla sin matematiska kreativitet och visa på att de har förstått grundprinciperna för den problemlösning de ägnat sig åt.

Skriftlig dokumentation

Jag anser att det är bra om elever antecknar vad de upplever att de har lärt sig, hur de lärde sig samt vilka eventuella missuppfattningar de kan ha rättat till. Att fråga eleverna hur de lärde sig kan även göra dem medvetna kring det egna lärandet vilket på sikt kan få dem att ta mer ansvar för det egna lärandet[16].

* ritar, räknar, skriver, gör tabeller, diagram…
[16] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University (s. 225).

Några klassiska misstag som man som lärare bör undvika

Att ge elever ledtrådar i ett för tidigt skede

I all välvilja är det lätt hänt att lärare förstör problem genom att ge elever ledtrådar i ett alltför tidigt skede. Det som händer är att elever då inte får utveckla sina egna idéer eller att de missar idéer som de hade kunnat utveckla.[17] Det är bra att låta idéer som är omständiga och kanske inte kan leda till generella lösningar få leva vidare, i varje fall under en viss tid, då omständiga idéer ofta är väldigt konkreta och då kan ge eleverna en bra grundförståelse. Rekursion är ett exempel på en idé som kan bli väldigt omständig som när elever ritar figur efter figur...

Otillräckligt förarbete och/eller efterarbete

Två andra vanliga misstag som lärare gör är att de inte låter förarbetet och/eller efterarbetet ta den tid som behövs. Detta kan leda till att elever inte förstår vad det är de skall lösa och/eller att elever lämnar undervisningstillfället med missuppfattningar och kanske även utan att ha förstått vad problemet egentligen gick ut på. För att ett matematiskt problem skall kunna lösas så måste eleven självfallet förstå problemet och vad det är som skall lösas. Många elever har dessutom en svag textförståelse. Att låta elever med svag textförståelse omformulera problemet, och med egna ord beskriva vad som skall lösas, kan hjälpa.

Att problemlösning inte är en del av den ordinarie undervisningen

En del lärare gör misstaget att endast kräva problemlösning av ”duktiga, snabba elever”. Många gånger är det även som så att problemlösning inte genomförs som en del av den ordinarie undervisningen, utan hamnar vid sidan om som ett extramoment.

Att endast en lösning lyfts fram

Vad man som lärare även bör tänka på är att inte endast en lösning på problemet lyfts fram och diskuteras. Det kan få elever att tro att det bara finns en metod som kan ge en korrekt lösning.

Svårigheter i genomförande av matematisk problemlösning

I följande stycke beskriver jag till stor del mina egna erfarenheter kring de svårigheter som jag själv har stött på i mitt arbete med BF-elever på Vipan.

Den största svårigheten - undervisningstraditionen

Det finns en del förutsättningar för att undervisning genom problemlösning skall fungera smärtfritt. En förutsättning är att det är en del av elevernas undervisningstradition. Enligt mina erfarenheter har det visat sig att denna förutsättning leder till en hel del bekymmer. De elever som jag har undervisat, säger sig tyvärr, i stort sett alltid strikt ha följt läroböcker under sina tidigare skolår, och flera av dessa elever anser att laborativ matematik inte är ”riktig matematik”. Elever, med dessa upplevelser kan exempelvis uttrycka att: *”jag vill inte leka, jag vill ägna mig åt riktig matematik”*,

[17] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University.

”jag vill bara räkna i boken och inte bli avbruten av annat”. Ett förtydliggörande av målen för dessa elever kan därför vara nödvändigt.
Ett annat problem, som jag även har upplevt, är vår undervisningstradition innehåller så lite laborativ matematik att även skolledare, ämneskolleger och andra kolleger kan ställa sig frågande till arbetsmetoderna och därmed stöttar elever i sin önskan att inte bli störda när de sitter med sina läroböcker. Ett råd som jag har fått mer än en gång är: *”Låt eleverna bestämma hur de vill ha det”*.

När eleven inte vill, är ostrukturerad, otålig, osjälvständig eller har svårt att hantera stress

En annan förutsättning som kraftigt underlättar vid problemlösning är när elever har en vilja att lösa problemet. Problemlösning är mer ansträngande än uppgifter i en lärobok. Problemlösning kräver tålamod och att elever kan följa den plan/strategi som de har formulerat. En uppgift kan inte heller vara ett problem om den inte kräver någon som helst ansträngning. Det kan ta tid för elever att vänja sig vid nya arbetsmetoder, då många elever endast har jobbat i läroböcker under sina tidigare skolår. Som lärare gäller det att inte ge upp utan att inse att förändringar kan ta tid.

Skolans organisation, otillräcklig fortbildning och rektorer som brister i sitt övergripande ansvar

Som exempel, på hur skolans organisation kan ha negativa konsekvenser för elevers lärande i matematik, vill jag beskriva hur jag upplever att det fungerar på min arbetsplats, gymnasieskolan Vipan i Lund. På Vipan jobbar vi i programarbetslag där det på grund av extraordinära projekt[*], rektors information via arbetslagsledaren och under arbetslagstid övriga möten (ATP, RO …) finns lite tid över till ämnesövergripande projekt eller elevvårdande frågor. Än mindre finns det tid till att utveckla undervisningen i matematik. I mitt programarbetslag är jag dessutom ensam som matematiklärare. Jag vill betona att jag inte ogillar grundtanken med fungerande programarbetslag, men att jag tycker att det är sorgligt att strukturen, som jag upplever inte tillräckligt väl fyller sitt grundsyfte, även leder till att vi matematiklärare hindras att samverka över ämnet. Enligt skolinspektionens rapport[18] är mina upplevelser från Vipan inte på något sätt ovanliga.
I skolinspektionens rapport[18] beskrivs hur rektorer, som förlitar sig sina lärare, inte tar sitt övergripande ansvar för undervisningens kvalitet. På så sätt blir elevers resultat många gånger mer beroende på vilken lärare de har än på vilket sätt de har eller inte har uppfyllt målen. Rapporten visar även på att det finns brister i kvalitetssäkringen. Rektorer borde, enligt rapporten, se till att lärare fortbildas så att de har förutsättningar att utföra ett professionellt uppdrag. De bör även hörsamma lärare som efterfrågar möjligheter till gemensamma diskussioner kring sin undervisning. Att besöka andra lärares lektioner, ”lesson study” och att gemensamt planera och utveckla lektioner, har nämligen visat sig vara ett framgångsrecept.[19] Enligt rapporten är det tydligt att det inte bara är vi på Vipan som inte hinner hantera pedagogiska frågor kring vår undervisning i samband med våra matematikkonferenser och att det inte heller bara är vi som inte hinner med det under övrig tid. Skolans organisation, brist på fortbildning och rektorer som brister i sitt pedagogiska ansvar leder tyvärr till att lärare, mentorer (och sannolikt även skolledare) förbli omedvetna om matematikundervisningens mål och rekommenderade undervisningsmetoder. Detta, i sin tur, leder indirekt till att matematikundervisningen stannar kvar i sin undervisningstradition där för höga betyg sätts.

[18] Skolinspektionens rapport 2010:13, Diarienummer 40-2009:1837, Stockholm 2010
*utfärder, temaveckor, föredrag, lära-känna aktiviteter för elever …
[19] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University (s. 166).

Strategier vid problemlösning

Eva Taflin definierar sin avhandling[20] strategier enligt följande: *"Strategier är speciella metoder för att lösa problem, t.ex. välja en eller flera operationer, rita bilder, söka mönster, göra en tabell, teckna en ekvation, gissa och pröva, arbeta baklänges, lösa ett liknande enklare problem. Denna studie begränsas till strategier som är möjliga att upptäcka för en observatör."*

Taflins definition är tydligt inspirerad av de metoder som Lester beskriver[21] vid problemlösning som till exempel:

- välja en eller flera operationer att arbeta med
- rita bilder
- söka mönster
- arbeta baklänges
- göra en lista
- skriva upp en ekvation
- dramatisera situationen
- göra en tabell eller ett diagram
- gissa eller pröva
- lösa ett enklare problem
- använda laborativa material eller modeller

Lite kort kring olika kategorier av problem

Andra beteckningar som jag har stött på, utöver rika problem är vardagsproblem, öppna problem och slutna problem. I några rader beskrivs vad var och en av dem innebär i korta ordalag:

Vardagsproblem

Det har visat sig att när problem handlar om vardagsföreteelser så kan det i vissa fall hindra elever från att lösa problemen när elevers vardagstänkande tar över, på bekostnad av det matematiska tänkandet. Då kan elever istället fundera över vad som händer i verkligheten.[22]

Öppna problem

Öppna problem är problem som ofta forumleras av en bild eller händelse som kan leda till många olika problem och olika svar.

Slutna problem

Slutna problem är problem där det finns ett rätt svar, som i läroböcker.

Det kan även vara bra att känna till vad en naken matematikuppgift innebär. En naken matematikuppgift är en uppgift som inte har placerats i något sammanhang, d.v.s. uppgifter utan kontext. Exempel på en sådan skulle kunna vara "lös följande ekvation …".

[20] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University (s. 108).
[21] Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I *Matematik - ett kommunikationsämne*. Ahlström m fl. Göteborg: Göteborgs universitet. Nämnaren TEMA. (pp. 85-91).
[22] Wistedt, Brattström, & Jacobsson, 1992. *Att vardagsanknyta matematikundervisningen*. Stockholms universitet. Pedagogiska institutionen.

Litet terminologi

Matematiskt begrepp	ett statiskt objekt som består av en term, en definition och kan beskrivas av en referent.[23] Ett exempel är begreppet ”yta”. Termen är yta, och definitionen är en sammanhängande 2-dimensionell punktmängd i rummet. Referenten är ordet area.[20]
Matematisk representation	matematiska idéer behandlas med hjälp av olika uttrycksformer (representationer), t.ex. muntligt, skriftligt, med hjälp av materiel, med gester, som bilder. En representation är när någonting beskrivs (uttrycks) på ett annat sätt. Varje representation är en abstraktion av den verkliga världen. Fler exempel på representationer är modeller, grafer, formler... Representationer är viktiga då matematiska idéer introduceras. Då är det bra att börja i så konkreta representationer som möjligt inför övergången mot mer abstrakta representationer. Detta är speciellt viktigt för de många elever har svårt att koppla mellan den fysiska och abstrakta världen.[24]
Matematiskt resonemang	Matematiska resonemang har som mål att man skall kunna dra logiska slutsatser om matematiska idéer och samband och kunna formulera generaliseringar.[25]

[23] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University (s. 206).
[24] Rystedt & Trygg, 2010. *Laborativ matematikutveckling – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.
[25] Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University (s. 210).

Bilaga - kunskapsmål för betyget E i kursen matematik 1a kopplat till de olika kompetenserna

	Förklaring	Betyget E
Begreppskompetens	Förmåga att använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.	Eleven visar **med viss säkerhet** innebörden av centrala begrepp i handling samt beskriver **översiktligt** innebörden av dem med **någon** annan representation. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan dessa representationer. Eleven använder **med viss säkerhet** begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**.
Algoritmkompetens	Förmåga att hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.	I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer, upptäcker misstag och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala och andra praxisnära verktyg.
Problemlösnings-kompetens & Modellerings-kompetens	Förmåga att formulera, analysera och lösa matematiska problem samt att värdera valda strategier, metoder och resultat. Förmåga att tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt att använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar	Eleven formulerar, analyserar och löser praxisnära matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om **delar av** problemsituationer i karaktärsämnena till matematiska formuleringar genom att **informellt** tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven utvärderar med **enkla** omdömen resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.
Resonemangs-kompetens	Förmåga att följa, föra och bedöma matematiska resonemang.	Eleven för **enkla** matematiska resonemang och värderar med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skiljer mellan gissningar och välgrundade påståenden.
Kommunikations-kompetens	Förmåga att kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling	Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal, enkel skrift och handling **med inslag av** matematiska representationer.
Kompetens att relatera	Förmåga att relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.	Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom för eleven **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Referenser

Heddens, 1986. *Bridging the gap between the concrete and the abstract*. The Aritmetic Teacher, 33(6), 14-17.

Lester, F. K. Jr. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem- Solving Research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press, Inc. (pp. 229-261).

Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I *Matematik - ett kommunikationsämne*. Ahlström m fl. Göteborg: Göteborgs universitet. Nämnaren TEMA. (pp. 85-91).

Taflin, 2007. *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå University.

Rystedt & Trygg, 2010. *Laborativ matematikutveckling – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Wistedt, Brattström, & Jacobsson, 1992. *Att vardagsanknyta matematikundervisningen*. Stockholms universitet. Pedagogiska institutionen.

Läroplanen för de frivilliga skolformerna - Lpf 94.

Skolinspektionens rapport 2010:13, Diarienummer 40-2009:1837, Stockholm 2010.

Ämnesplan för ämnet matematik – 2010-09-23, 57(187), Dnr 2009:520.

http://www.skolverket.se/sb/d/2503/a/13845/func/amnesplan/id/MA/titleId/Matematik

http://www.skolverket.se/sb/d/726/a/13845/func/kursplan/id/3202/titleId/MA1201%20-%20Matematik%20A